تعرف فيما يلي على بعض خواص المؤثر الخطي المتعلقة بالاستمرار والمحدودية.

مبرهنة (١) :

إذا كان المؤثر الخطي $A:E_1\longrightarrow E_2$ مستمراً في النقطة $x_0 \in E_1$ فيكون عندئذ مستمراً على كل E_1.

الإثبات :

لتكن x نقطة ما من E_1، حيث $x \neq x_0$. ولتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر E_1 بحيث:

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ أي أن $\|x_n - x\|_{E_1} \longrightarrow 0$.

لدينا الآن :

$$\|(x_n - x + x_0) - x_0\|_{E_1} = \|x_n - x\|_{E_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

أي أن المتتالية $\{(x_n - x + x_0)\}$ متقاربة في E_1 من x_0 . وبما أن المؤثر A مستمر في x_0 فإن :

$$\|A(x_n - x + x_0) - Ax_0\|_{E_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولكن (طالما أن المؤثر A خطي):

$$A(x_n - x + x_0) - Ax_0 = Ax_n - Ax + Ax_0 - Ax_0$$
$$= Ax_n - Ax$$

إذن:

$$\|Ax_n - Ax\|_{E_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

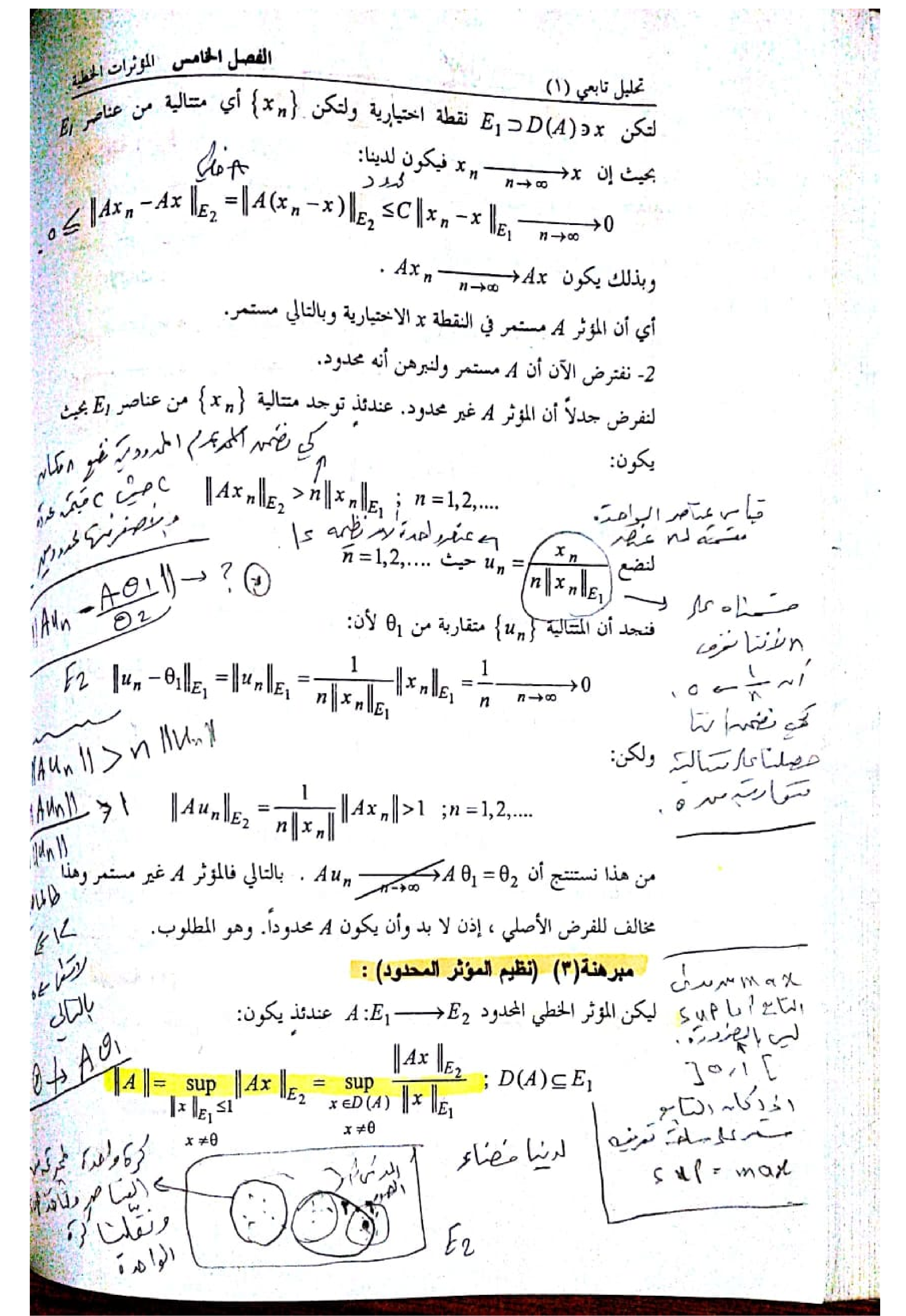
وهذا يعني أن المؤثر A مستمر في النقطة $x \in E_1$ ولما كانت x اختيارية من E_1 فإن A مستمراً على كل الفضاء E_1 وهو المطلوب.

مبرهنة (٢) :

ليكن المؤثر الخطي $A:E_1\longrightarrow E_2$. عندئذ يكون A مستمراً إذا وفقط إذا كان محدوداً.

الإثبات:

1- نفترض أن المؤثر A محدود ولنبرهن أنه مستمر



لتكن $x \in D(A) \subset E_1$ نقطة اختيارية ولتكن $\{x_n\}$ أي متتالية من عناصر E_1

بحيث إن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ فيكون لدينا:

$$\|Ax_n - Ax\|_{E_2} = \|A(x_n - x)\|_{E_2} \le C\|x_n - x\|_{E_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وبذلك يكون $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$.

أي أن المؤثر A مستمر في النقطة x الاختيارية وبالتالي مستمر.

2- نفترض الآن أن A مستمر ولنبرهن أنه محدود.

لنفرض جدلاً أن المؤثر A غير محدود. عندئذ توجد متتالية $\{x_n\}$ من عناصر E_1 بحيث يكون:

$$\|Ax_n\|_{E_2} > n\|x_n\|_{E_1} \;;\; n = 1,2,....$$

لنضع $u_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|_{E_1}}$ حيث $n = 1,2,....$

فنجد أن المتتالية $\{u_n\}$ متقاربة من θ_1 لأن:

$$\|u_n - \theta_1\|_{E_1} = \|u_n\|_{E_1} = \frac{1}{n\|x_n\|_{E_1}}\|x_n\|_{E_1} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ولكن:

$$\|Au_n\|_{E_2} = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > 1 \;\; ; n = 1,2,....$$

من هذا نستنتج أن $Au_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} A\theta_1 = \theta_2$. بالتالي فالمؤثر A غير مستمر وهذا

مخالف للفرض الأصلي ، إذن لا بد وأن يكون A محدوداً. وهو المطلوب.

مبرهنة(٣) (نظيم المؤثر المحدود) :

ليكن المؤثر الخطي المحدود $A: E_1 \longrightarrow E_2$ عندئذ يكون:

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|_{E_1} \le 1 \\ x \ne \theta}} \|Ax\|_{E_2} = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \ne \theta}} \frac{\|Ax\|_{E_2}}{\|x\|_{E_1}} \;;\; D(A) \subseteq E_1$$

الإثبات:

بما أن المؤثر A خطي ومحدود فيكون لدينا من أجل $\|x\|_{E_1} \leq 1$:

$$\|Ax\|_{E_2} \leq \|A\| \|x\|_{E_1} \leq \|A\|$$

وبالتالي:

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_{E_2} \leq \|A\| \qquad (1)$$

من ناحية ثانية ومن أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $E_1 \ni x_\varepsilon \neq \theta$ بحيث إن:

$$\|Ax\|_{E_2} > (\|A\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|_{E_1} \qquad (*)$$

فإذا أخذنا $u_\varepsilon = \dfrac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|_{E_1}}$ لوجدنا أن: $\|u_\varepsilon\|_{E_1} = 1$ وكذلك:

من المتراجحة (*):

$$\|Au_\varepsilon\|_{E_2} = \frac{\|Ax_\varepsilon\|_{E_2}}{\|x_\varepsilon\|_{E_1}} > (\|A\| - \varepsilon)$$

أصبح الآن:

$$\sup_{\|x\|_{E_1} \leq 1} \|Ax\|_{E_2} \geq \|Au_\varepsilon\|_{E_2} > (\|A\| - \varepsilon)$$

وبما أن العدد $\varepsilon > 0$ كان اختيارياً فيكون:

$$\sup_{\|x\|_{E_1} \leq 1} \|Ax\|_{E_2} \geq \|A\| \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{E_1} \leq 1} \|Ax\|_{E_2}$$

مما سبق نستنتج أن العلاقة: $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x \in E_1 \\ x \neq \theta}} \dfrac{\|Ax\|_{E_1}}{\|x\|_{E_1}}$ صحيحة أيضاً .

(٥-٣) جمع وجداء المؤثرات :

تعريف (٦) :

ليكن A و B مؤثرين من الفضاء الخطي E إلى الفضاء E_1، نسمي المؤثر C الذي يضع كل عنصر $x \in E$ مقابل عنصر $y \in E_1$ حيث:

$$y = Ax + Bx$$

مجموع المؤثرين $A + B$ ويكون معرفاً على كل العناصر المنتمية لتقاطع ساحتي المؤثرين A و B أي:

$$C : D(A) \cap D(B) \longrightarrow E_1 \; ; \; (D(A) \cap D(B) \subseteq E)$$

ملاحظة (٦) :

إذا كان E_1, E فضاءين خطيين منظمين وكان A و B مؤثرين محدودين عندئذٍ يكون المؤثر $(A + B)$ محدوداً أيضاً ويكون:

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\| \qquad (3)$$

وهذا واضح لأن:

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

وذلك من أجل أي $x \in E$. وبالتالي نستنتج صحة المتراجحة (1).

تعريف (٧) :

ليكن المؤثرين A و B حيث:

$$A : E \longrightarrow E_1$$

$$B : E_1 \longrightarrow E_2$$

جداء المؤثرين A و B هو مؤثر ثالث C، يضع العنصر $x \in E$ مقابل عنصر $z = B(Ax)$ من الفضاء E_2 ويكون:

$$C : D_C \longrightarrow E_2$$

حيث D_C مكونة من العناصر $x \in D(A)$ بحيث $Ax \in D(B)$ ونكتب $C = BA$

يجب أن يكون: $R(A) \subset D(B)$

$(k.A)x = kAx$

$(A.B)x = A[B(x)]$ مثل تركيب التطبيقات

$\|(A+B)x\| \le \|x\| (\|A\| + \|B\|)$

اهم شرط مستمر و ازل = منطلبا الثاني .

ملاحظة (٧) :

إذا كان A و B مؤثرين محدودين من فضاء منظم آخر عندئذٍ يكون المؤثر C محدوداً

ويكون:

$$\|C\| = \|BA\| \le \|B\| . \|A\| \qquad (4)$$

ذلك لأن:

$$\|Cx\| = \|B(Ax)\| \le \|B\| \|Ax\| \le \|B\| \|A\| . \|x\|$$

محدود . محدود .

$\sup \frac{\|B(Ax)\|}{\|x\|} \le \|B\| \|A\|$.

وبالتالي نستنتج المتراجحة (3).

ملاحظة (٨) :

بما أن عمليتي الجمع والجداء عمليتين تجميعيتين يمكننا تعميم جمع وجداء المؤثرات من أجل ثلاث مؤثرات أو أكثر وذلك وفق مبدأ التعريفين (٦) و (٧) .

تعريف (٨) :

الجداء kA للمؤثر A بالعدد k هو عبارة عن مؤثر أيضاً يضع مقابل كل عنصر x من $D(A)$ العنصر kAx:

(٥-٤) العكس والمؤثر العكسي (Inverse operator) :

ليكن المؤثر $A:E \longrightarrow E_1$ حيث $D(A)$ ساحة المؤثر A و $R(A)$ مداه.

تعريف (٩) :

نقول إن المؤثر A قابلاً للعكس إذا كانت المعادلة $Ax = y$ محققة وتملك حلاً وحيداً من أجل أي $y \in R(A)$.

$D(A) \subset E_1 \to R(A) \subset E_2$

أي إذا كان المؤثر A قابلاً للعكس، عندئذ كل عنصر y $(y \in R(A))$ يمكن وضعه مقابل عنصر وحيد x من $D(A)$ والذي يعتبر حلاً للمعادلة $Ax = y$.

المؤثر الذي يتمتع بهذه المقابلة ندعوه بالمؤثر العكسي للمؤثر A ونرمز له بالرمز A^{-1}.

مبرهنة (٤) :

المؤثر العكسي A^{-1} للمؤثر الخطي A هو أيضاً مؤثر خطي.

الإثبات:

لنلاحظ أولاً وقبل كل شيء أن مدى المؤثر A، $\left(D(A^{-1}) = R(A)\right)$ يشكل فضاءً جزئياً.

$Ax = y \Rightarrow x = A^{-1}y$

ليكن $R(A) \ni y_1, y_2$ ولإثبات المطلوب لنثبت أنه من أجل الأعداد α_1, α_2 يكون:

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \quad (5)$$

لنضع $Ax_1 = y_1$ و $Ax_2 = y_2$، وبما أن A مؤثر خطي عندئذٍ يكون لدينا:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad (6)$$

لكن حسب تعريف المؤثر العكسي لدينا $x_1 = A^{-1} y_1$ ، $x_2 = A^{-1} y_2$.

وبالتالي لدينا:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 \quad (7)$$

بالاعتماد على العلاقة (6) والتعريف (٩) للمؤثر العكسي نكتب:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \quad (8)$$

بمقارنة المساواتين (7) و (8) نجد أن المساواة (5) محققة.

مبرهنة (٥): هامة.

ليكن E_1 و E_2 فضاءين خطيين منظمين، وليكن المؤثر الخطي A حيث $A: E_1 \to E_2$ يحقق الشرط التالي:

$$\| Ax \| \geq m \| x \| \; ; \; \forall x \in D(A) \subseteq E_1$$

حيث m عدد ثابت موجب عندئذٍ يكون المؤثر العكسي A^{-1} موجوداً وخطياً ومحدوداً.

الإثبات:

لنثبت أولاً وجود المؤثر A^{-1}، ومن أجل ذلك وحسب التعريف (٩) يكفي إثبات أن المؤثر الخطي A هو تطبيق متباين.

ليكن:

$$Ax_1 = y \;\; \& \;\; Ax_2 = y \;\; ; \;\; x_1, x_2 \in D(A) \subseteq E_1$$

ولنبين أن $x_1 = x_2$.

من الفرض لدينا أن :

$$\|A(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|$$

لكن:

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = \theta_2$$

أي أن: $0 \leq m\|x_1 - x_2\|$ ولما كان $0 < m$ نستنتج أن $x_1 = x_2$.

من المبرهنة (٤) نستنتج أن المؤثر A^{-1} مؤثر خطي.

لنثبت أن المؤثر A^{-1} محدود.

لدينا: $Ax = y$ ، حيث: $x \in D(A) \subseteq E_1$ و $y \in R(A) \subseteq E_2$

هذا يكافئ القول إن $x = A^{-1}y$ وبالتالي:

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|AA^{-1}y\| = \frac{1}{m}\|y\|$$

أي أن A^{-1} محدود.

تمهيدية (١) :

لتكن M مجموعة كثيفة تماماً في فضاء باناخ B (كثيفة تماماً أي أن لصاقة M مساوية لـ B). عندئذ أي عنصر مغاير للصفر y من الفضاء B يمكننا كتابته على شكل متسلسلة من الشكل: $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$

حيث: $M \ni y_k$ و $\|y_k\| \leq \frac{3\|y\|}{2^k}$

الإثبات:

وهو المطلوب إثباته.

هامة

مبرهنة (٦) (مبرهنة باناخ للمؤثر العكسي) :

ليكن المؤثر الخطي المحدود A من فضاء باناخ B إلى فضاء باناخ B_1. عندئذٍ المؤثر العكسي A^{-1} محدود.

مصطلحات :

سنذكر بعض الرموز المتداولة لاحقاً وقد نصادفها في بعض المراجع .

- $B(X,Y)$ رمز لفضاء كل المؤثرات المحدودة من X إلى Y .
- $L(X,Y)$ رمز لفضاء كل المؤثرات الخطية من X إلى Y .
- $L_B(X,Y)$ رمز لفضاء كل المؤثرات الخطية و المحدودة من X إلى Y .
- و قد يرمز لـ $L_B(X,Y)$ بالرمز $L_B(X \to Y)$ في بعض المراجع .
- $L(E_1,E_2)$ رمز لفضاء كل المؤثرات الخطية من فضاء خطي منظم E_1 إلى آخر E_2 .
- $L(B_1,B_2)$ رمز لفضاء كل المؤثرات الخطية من فضاء باناخ أول B_1 إلى فضاء باناخ ثاني B_2.
- $L(E,B)$ رمز لفضاء كل المؤثرات الخطية من فضاء منظم إلى فضاء باناخ .

(٥-٥) فضاء المؤثرات الخطية المحدودة :

(Space of bounded linear operators)

لنأخذ مجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة من الفضاء الخطي المنظم E_1 إلى الفضاء الخطي المنظم E_2، لنرمز لهذه المجموعة بالشكل $L_B(E_1,E_2)$. ولنعرف عملية جمع عنصرين A_1 و A_2 من $L_B(E_1,E_2)$ (كما مر سابقاً بالفقرة (٥-٣) بالشكل:

$$(A_1+A_2)x = A_1x + A_2x \;\; ; \; \forall x \in D(A_1+A_2) = D_{A_1} \cap D_{A_2} \subset E_1$$

كما ونعرف عملية الجداء بعدد λ بالشكل:

$$(\lambda A)x = \lambda A x \quad : \; \forall x \in D_A \; , \lambda \in \mathbb{R}$$

(يمكن أن تكون λ من $\mathbb{C}$ إذا كان الفضاءان E_1 و E_2 عقديين).

مبرهنة (٧) :

مجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة $L_B(E_1,E_2)$ مع النظيم التالي:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$$

وعمليتي الجمع والجداء بعدد في $L_B(E_1,E_2)$ تشكل فضاءً خطياً منظماً.

الإثبات:

للإثبات يكفي التحقق من أن النظيم المعرف $\|A\|$ يحقق شروط النظيم في الفضاءات الخطية المنظمة.

فمن أجل $x \in E_1$ و A من $L_B(E_1,E_2)$ يكون:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \ge 0 \qquad (N_1)$$

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \qquad (N_2)$$

$$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \qquad (N_3)$$

$$= |\lambda| \|A\| \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax+Bx\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|\le 1} \|Bx\| \qquad (N_4)$$

أي أن:

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$$

وذلك من أجل B, A من $L_B(E_1,E_2)$.

بما أن الشروط السابقة محققة هذا يعني أن $L_B(E_1,E_2)$ فضاء خطي منظم.

ملاحظة (٩) :

العنصر الصفري بالنسبة لعملية الجمع في $L_B(E_1,E_2)$ هو المؤثر الصفري 0 من الفضاء E_1 إلى الفضاء E_2 والمعرف بالشكل:

$$0x = \theta_2 \; ; \; \forall x \in E_1$$

و θ_2 هو صفر الفضاء E_2.

كما أن نظير المؤثر A بالنسبة لعملية الجمع في $L_B(E_1,E_2)$ هو المؤثر $-A$ والمعرف بالشكل:

$$(-A)x = -Ax \quad ; \quad \forall x \in E_1$$

١- مفهوم التقارب لمتتالية المؤثرات في الفضاء $L_B(E_1,E_2)$:

قبل عرض أهم المبرهنات المتعلقة بالفضاء $L_B(E_1,E_2)$ لنذكر أولاً ببعض مفاهيم التقارب لمتتالية من المؤثرات $\{A_n\}$ من الفضاء $L_B(E_1,E_2)$.

تعريف (١٠) :

نقول عن المتتالية $\{A_n\}$ إنها تتقارب بانتظام في الفضاء $L_B(E_1,E_2)$ من المؤثر المحدود A_0 (حسب مفهوم التقارب بالنظيم في $L_B(E_1,E_2)$) إذا تحقق:

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A_0\| = 0$$

أو نكتب :

$$\|A_n - A_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

تعريف (١١) :

نقول عن المتتالية $\{A_n\}$ إنها متقاربة تقارباً قوياً من المؤثر A_0 في الفضاء E_2 إذا تحقق:

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - A_0 x\| = 0 \quad ; \quad x \in E_1$$

أو نكتب:

$$\|A_n x - A_0 x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

تعريف (١٢) :

نقول عن المتتالية $\{A_n\}$ إنها متقاربة تقارباً ضعيفاً من المؤثر A_0 في الفضاء E_2 إذا كانت المتتالية $\{A_n x\}$ متقاربة بضعف من $A_0 x$ وذلك من أجل أي $x \ni E_1$ وأي دالي خطي معرف على E_2 ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f(A_n x) = f(A_0 x) \quad ; \quad \forall x \in E_1$$

تعريف (١٣) :

نقول إن متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء $L_B(E_1,E_2)$ حسب مفهوم التقارب النقطي إذا كان:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|A_n x - A_m x\| = 0$$

من أجل كل نقطة $x \in E_1$.

ملاحظة (١٠) :

التقارب في الفضاء $L_B(E_1,E_2)$ حسب مفهوم التقارب بالنظيم ندعوه أيضاً التقارب المنتظم (Uniformly convergence).

كما أن التقارب النقطي في $L_B(E_1,E_2)$ والذي يعني أن $\lim_{n\to\infty} A_n x = A x$ وذلك من أجل أي x مثبتة من E_1 هو نفسه التقارب الضعيف في $L_B(E_1,E_2)$.

فيما يلي نكتفي بذكر نص مبرهنة سنحتاج إليها فيما بعد.

مبرهنة (٨) (باناخ – شتينهاوس) :

لتكن متتالية المؤثرات الخطية والمحدودة $\{A_n\}$ متتالية كوشي في كل نقطة x من فضاء باناخ B عندئذٍ تكون المتتالية $\{\|A_n\|\}$ محدودة، أي يوجد $0<C$ بحيث:

$$\|A_n\| \le C \quad ; \ (n=1,2,\ldots)$$

للاطلاع على الإثبات انظر المرجع [2] ص ١٧٨ .

ملاحظة (١١) :

من التعاريف السابقة للتقارب نستنتج أنه من التقارب المنتظم ينتج التقارب القوي ومن التقارب القوي ينتج التقارب الضعيف، أما العكس فليس صحيحاً والأمثلة التالية تبين ذلك.

مثال (١) :

لنأخذ في الفضاء ℓ_2 متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ حيث $A_n : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ والمعرفة بالشكل:

$$A_n \xi = (0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$$

حيث:

$$\ell_2 \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

إن المؤثر $\{A_n\}$ خطي ومحدود والمتتالية $\{A_n\}$ متقاربة تقارباً قوياً ولكنها ليست متقاربة تقارباً منتظماً. نلاحظ أن $\{A_n\}$ متقاربة بقوة من الصفر لأن:

$$A_n \xi \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta = 0.\xi$$

وبما أن $\|A_n x\| = \|x\|$ فإن المتتالية $\{A_n\}$ ليست متقاربة تقارباً منتظماً لأن:

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| = 1$$

مثال (٢):

لنأخذ في الفضاء ℓ_2 متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ من الفضاء ℓ_2 في نفسه حيث:

$$A_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, \xi_1, \xi_2, \dots) \; ; \; x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_2$$

هذا المؤثر خطي ومحدود والمتتالية $\{A_n\}$ متقاربة تقارباً ضعيفاً ولكنها ليست متقاربة تقارباً قوياً.

في الحقيقة إن كل دالي خطي محدود f على ℓ_2 يمكن تمثيله (انظر (٦-١-١) مثال(٦)) على الشكل:

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\zeta}_j$$

حيث: $\ell_2 \ni z = (\zeta_j)$.

بوضع $j = n + k$ واعتماداً على تعريف المؤثر A_n يكون لدينا:

$$f(A_n x) = \langle A_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \bar{\zeta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\zeta}_{n+k}$$

بالاعتماد على متراجحة كوشي شفارتز (وهي نفسها متراجحة هولدر من أجل $p = q = 2$) نجد:

$$|f(A_n x)|^2 = |\langle A_n x, z \rangle|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \sum_{m=n+1}^{\infty} |\bar{\zeta}_m|^2$$

إذن المتسلسلة الأخيرة هي باقي متسلسلة متقاربة وبالتالي فإن الطرف الأيمن من المتراجحة يقترب من الصفر عندما $n \to \infty$.

من هنا نجد:

$$f(A_n x) \longrightarrow 0 = f(x)$$

أي أن $\{A_n\}$ هي متقاربة بضعف من الصفر.

أما إذا أخذنا $x = (1,0,0,\ldots)$ عندئذٍ يكون:

$$\|A_n x - A_m x\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad ; \ (m \neq n)$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{A_n\}$ ليست متقاربة بقوة.

مبرهنة مساعدة (٩) :

لتكن $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المطبقة من فضاء باناخ B إلى فضاء خطي منظم E.

وبفرض أن المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة نقطياً من المؤثر A عندما $n \to \infty$ عندئذٍ المتتالية العددية $\{\|A_n\|\}$ محدودة ويكون المؤثر A محدوداً حيث $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.

لإثبات تمام الفضاء $L_B(E,B)$

مبرهنة (١٠) :

في الفضاء $L_B(E_1, E_2)$ إذا كان E_2 فضاءً تاماً (فضاء باناخ)، عندئذٍ الفضاء $L_B(E_1, E_2)$ يكون تاماً أيضاً (بمفهوم التقارب النقطي).

الإثبات:

لتكن $\{A_n\}$ متتالية كوشي من الفضاء $L_B(E_1, E_2)$ أي أن:

$$\|A_n - A_m\| \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0$$

لدينا:

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} 0 \ ; \forall x \in E_1$$

لذلك إذا كانت x نقطة مثبتة من الفضاء E_1 عندئذٍ المتتالية $\{A_n x\}$ هي متتالية كوشي

في الفضاء E_2. ولما كان الفضاء E_2 فضاءً تاماً إذن المتتالية $\{A_n x\}$ متقاربة من عنصر $y \ni E_2$ وهذا يعني:

$$y = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

بذلك نكون قد حصلنا على مؤثر يطبق الفضاء E_1 في الفضاء E_2 ولنرمز لهذا المؤثر بالرمز A أي أن:

$$y = Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \ ; \ x \in E_1$$

بالاعتماد على خواص النهايات يمكننا الاستنتاج أن المؤثر A هو مؤثر خطي كما أنه محدود حسب المبرهنة المساعدة (٩) أعلاه .

أي أن المتتالية العددية $\{\|A_n\|\}$ هي متتالية محدودة، وبالتالي يوجد عدد $0<C$ بحيث $\|A_n\|<C$ وذلك من أجل أي عدد طبيعي n من هنا نحصل على أن:

$\|A_n x\| \le \|A_n\| . \|x\|$

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \|x\| \le C \|x\|$$

وبما أن:

$$\|A_n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|Ax\|$$

إذا كان:

$$A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} A x$$

التقارب بالنظيم لا علاقة له بالتقارب،

عندئذٍ بأخذ نهاية طرفي المتراجحة السابقة لنحصل على أن:

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C \|x\|$$

وهذا يعني أن المؤثر A محدود.

بقي أن نبين أن المؤثر A هو نهاية لمتتالية المؤثرات $\{A_n\}$ في الفضاء $L_B(E_1,E_2)$ (حسب مفهوم التقارب بالنظيم).

لتكن $0<\varepsilon$ ولنأخذ n_0 بحيث:

$$n \ge n_0 \ ; \ \|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon \ ; \ p>0 \text{ و } \|x\| \le 1$$

لنفرض أن $p \to \infty$ عندئذٍ يكون : $\|Ax - A_n x\| \le \varepsilon$.

وذلك من أجل $n > n_0$ وكل x تحقق أن $\|x\| \le 1$.

لذلك من أجل $n \ge n_0$ لدينا:

$$\| A_n - A \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| (A_n - A) x \| \leq \varepsilon$$

وبالتالي $A = \lim_{n \to \infty} A_n$ (حسب مفهوم التقارب بالنظيم في $L_B(E_1, E_2)$ وهذا يعني أن الفضاء $L_B(E_1, E_2)$ هو فضاء باناخ) .

مبرهنة (١١) :